

## Ein „Monstrum“ verbindet die berühmten Zahlen $\pi$ und $e$

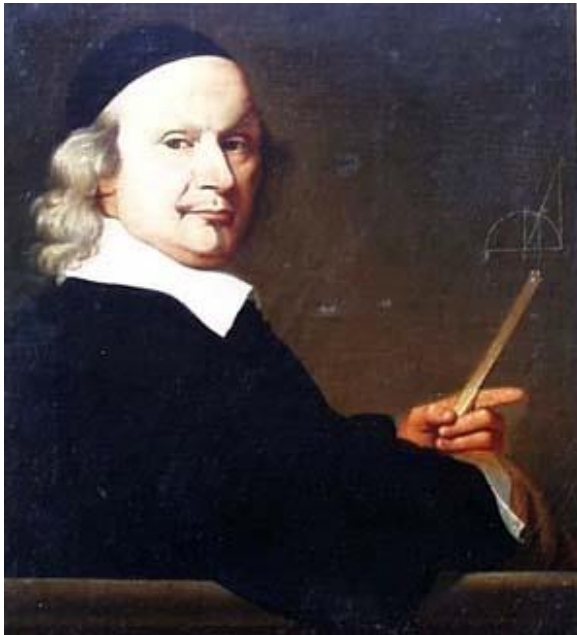
Dipl.-Ing. Peter Pohling, Palitzsch-Gesellschaft Dresden, November 2016

Gottfried Wilhelm Leibniz erahnte die geheimnisvolle Wucht der imaginären Zahl  $i$ , als er schrieb: „Daher fand er [gemeint ist *der göttliche Geist*] eine feine und wunderbare Ausflucht in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der idealen Welt, fast ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein, welches wir die imaginäre Wurzel nennen.“ [1].

Das Leibniz'sche „Monstrum“ ist die Quadratwurzel aus „-1“ nach Gl. (1):

$$\sqrt{-1} = i$$

Der englische Mathematiker John Wallis (**Bild 1**) schlug bereits 1673 die heute gebräuchliche Darstellung für eine komplexe Zahl  $z = x + i y$  als Punkt in einer Ebene vor. Die reellen Werte einer komplexen Zahl liegen auf einer  $x$ -Achse, die imaginären Werte befinden sich auf der dazu senkrechten  $y$ -Achse. Zum Beispiel sind das bei der komplexen Zahl  $4+3i$  vier Einheiten auf der reellen Achse und drei Einheiten auf der „imaginären“  $y$ -Achse. Von nun an konnten komplexe Zahlen anschaulich dargestellt werden.



**Bild 1: John Wallis (1616 – 1703),**



**Bild 2: Leonhard Euler (1707 – 1783)**

Quellen: Wikipedia

Das schlüssige mathematische System der komplexen Zahlen stammt von dem Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler (**Bild 2**), einem der größten Genies der Naturwissenschaft. 1735 gelang es Euler, das sogenannte „Basler Problem“ zu lösen. Er konnte eine Frage beantworten, die schon „1644 von Pietro Mengoli gestellt worden war: Wie groß ist die Summe sämtlicher reziproker Quadratzahlen. Dabei handelt es sich um eine unendliche Summe, denn es gibt unendlich viele Quadratzahlen. Viele der großen Mathematiker jener Tage versuchten, dieses Problem zu lösen, doch es gelang ihnen nicht.“ [2, S. 236]. Erst der junge Leonhard Euler fand mit der Reihe nach Gl. (2) die richtige Antwort:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Die besondere Eleganz dieser Gleichung legte – ähnlich wie bei Leibniz mit seiner Reihe für  $\pi/4$  - den Grundstein für die wachsende Berühmtheit. Seine Methode funktioniert auch mit den reziproken Quadraten der *ungeraden* und der *geraden* Zahlen nach Gl. (3) und (4):

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24}$$

Dreizehn Jahre später gelang Euler dann der „ganz große Wurf“ – die Entdeckung des Zusammenhangs zwischen der Kreiszahl  $\pi$ , der imaginären Zahl  $i$  und der später nach ihm benannten Eulerschen Zahl  $e$ .

Doch was ist eigentlich  $e$ ? Nun,  $e$  steht für „*exponentiell*“. Die Besonderheit der Exponentialfunktion  $e^x$  im **Bild 3** wurde schon 1683 von dem Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (**Bild 4**) erkannt. „Diese Zahl tritt bei Zinseszinsproblemen auf, führte zu Logarithmen und sagt uns, in welcher Weise Variablen wie Temperatur, Radioaktivität oder die Weltbevölkerung zunehmen oder abnehmen.“ [2, S. 257].

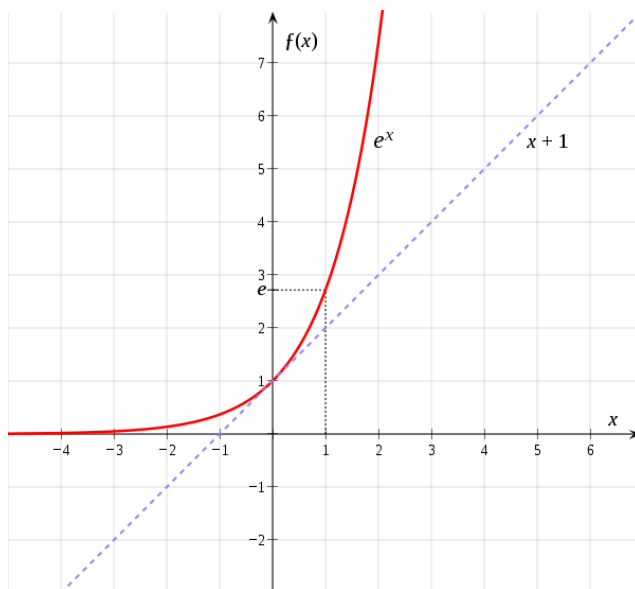


Bild 3: Exponentialfunktion  $y = e^x$



Bild 4: Jakob Bernoulli 1655 - 1705

Quellen: Wikipedia

Die Basis  $e$  der Exponentialfunktion hat den Wert **2,718281...** Der Wert von  $e$  steht an Stelle  $x = 1$  im **Bild 3**. Er ergibt sich aus der unendlichen Reihe nach Gl. (5):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mp \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mp \dots$$

Leonard Euler fand nicht nur diese schönen Reihen für  $\pi$  und  $e^x$ . Er erkannte anhand Struktur der darunter stehenden Reihen den engen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion  $e^x$  und den trigonometrischen Funktionen **sin** ( $x$ ) und **cos** ( $x$ ):

$$e^{ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

- Eulersche Formel -

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Die Euler-Formel ist wohl eine der schönsten Formeln der Mathematik. Denn sie vereint in einer einzigen Gleichung für  $x = \pi$  – also für den Halbkreis eines Einheitskreises mit dem Radius  $r = 1$  -

- das Leibniz'sche imaginäre „Monstrum“  $i$  und
- die natürlichen Zahlen **1** und **0**, die für Leibnizens „Sein“ und „Nichtsein“ stehen, mit
- den transzendenten Zahlen  $e$  und  $\pi$ , den berühmtesten Zahlen-Konstanten der Wissenschaft.

Literatur:

- [1] Ian Stewart, Weltformeln – 17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten, Rowohlt Taschenbuch-Verlag, 5. Auflage, Januar 2015, S. 137
- [2] Ian Stewart, Unglaubliche Zahlen, Rowohlt Taschenbuch-Verlag, deutsche Erstauflage, Juli 2016