# Entdeckung, Modellierung und Diskussion von dimensionslosen Konstanten des Kosmos, Teil I - Sommerfelds Feinstrukturkonstante

1913 stellte Niels Bohr (1885 – 1962, Nobelpreis 1922) ein „halbklassisches“ Atom-Modell vor. Mit den drei Bohrschen Postulaten konnten die atomaren Linienspektren erklärt werden, jedoch nicht die bereits beim Wasserstoff beobachtbare „feinere Struktur“ des Spektrums. Deshalb führte Arnold Sommerfeld (1868 – 1951) bereits 1914 die nach ihm benannte Feinstruktur-Konstante $\alpha$ ein. Diese rätselhafte dimensionslose Zahl ist der Quotient aus der atomaren Geschwindigkeit $v_A$ der Elektronen auf der ersten „Bahn“ und der Geschwindigkeit $c$ der Photonen im Vakuum.
Warum die Feinstrukturkonstante $\alpha$ aber ausgerechnet den Wert **7,297 352 566 4(17)·10$^{-3}$ ≈ 1/137** hat, das ist nach 100 Jahren immer noch ein ungelöstes Rätsel der Physik.
Am 18. Januar 2018 fand in der Palitzsch-Gesellschaft der erste Diskussionsabend zu den *dimensionslosen* Konstanten der Physik statt. An diesem Abend standen die von Gerhart Ziegner erzielten Modellierungsergebnisse für $\alpha$ unter Verwendung der Kreiszahl $\pi$ im Mittelpunkt.

**1. Wie wird die Lichtgeschwindigkeit $c$ in Atomen zu $v_A$ „reduziert“?**
Die atomare Geschwindigkeit $v_A$ ergibt sich aus dem Klammerausdruck der Gl. (1).

$$\alpha = \left( \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \hbar} \right) \cdot \frac{1}{c} \quad (1)$$

In der Klammer stehen

- die elektrische Elementarladung $e$, 1923 erstmals präzise bestimmt von Robert A. Millikan,
- die Feldkonstante $\varepsilon_0$ der Elektrodynamik von James C. Maxwell (1831 – 1879) und
- das *reduzierte* Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi$, benannt nach Max Planck (1858 – 1947).

Der Zahlenwert für $\alpha$ hat eine relativ hohe Genauigkeit. Die Unsicherheit beträgt nur $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ [1]. Die Lichtgeschwindigkeit $c$, die elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0$ und die magnetische Feldkonstante $\mu_0$ werden ab 1983 als „*exakte*“ Konstanten, als „fehlerfreie“ Konstanten, in den Tabellenbüchern geführt.
Aber die elektrische Elementarladung $e$ und das Wirkungsquantum $h$ haben einen zehnmal größeren Fehler als $\alpha$.
Das stellt sich natürlich die Frage:
Wie konnten die Metrologen und Experimentalphysiker diese hohe Genauigkeit bei $\alpha$ erzielen?

Um das zu verstehen, formen wir die Gl. (1) in die Gl. (2a) um [2, S. 22]:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_0 c} \right) \cdot \left( \frac{e^2}{h} \right) \quad (2a)$$

Dem ersten Klammerausdruck von Gl. (2a) entspricht die Wurzel aus $\mu_0/\varepsilon_0$.

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{R_K} \quad (2b)$$

Der Wurzelausdruck ist der Wellenwiderstand $Z_0$. Er hat den Wert von 376,730 313 462… Ω. Da $Z_0$ seit 1983 ebenfalls eine *exakte* Naturkonstante ist, kann nur der Quotient $e^2/h$ den Fehler von $\alpha$ verursachen. Nun kommt ein Glücksfall ins Spiel!
Der Quotient $h/e^2$ lässt sich mit dem von Klaus von Klitzing (*1943, Nobelpreis 1985) entdeckten „*quantisierten*“ *Hall-Effekt* sehr genau bestimmen. Der Messwert beträgt 25812,807455 Ω. Diese sog. *von-Klitzing-Konstante* $R_K$ dient inzwischen den Metrologen als „Widerstandsnormal“, da der Zahlenwert international gut übertragbar ist.

Wir haben bei der Sommerfeldschen Relation gemäß Gl. (1) gesehen, wie $\boldsymbol{\alpha}$ die relativistische Geschwindigkeit $\boldsymbol{c}$ zur atomaren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_A}$ reduziert, also verringert.
Und wir haben anhand von Gl. (2b) erfahren, wie der Quotient zwischen

- dem Wellenwiderstand $\boldsymbol{Z_0}$ der elektromagnetischen *Felder* und
- dem gequantelten *atomaren* Widerstand $\boldsymbol{R_K}$

eine wesentlich genauere experimentelle Bestimmung von $\boldsymbol{\alpha}$ ermöglicht.
Allerdings gibt es noch keine *physikalische Theorie*, die den konkreten Zahlenwert von $\boldsymbol{\alpha}$ vorhersagen könnte.
Es gab deshalb in den zurückliegenden 100 Jahren die vielfältigsten Versuche, den Zahlenwert der Strukturkonstante durch *mathematische* Konstrukte anzunähern. Auch Gerhart Ziegner war und bleibt diesem Jahrhunderträtsel auf der Spur. Er hat dafür Zeit und Nerven geopfert.

## 2. Über die Magie der Zahl 137

Seine Zwischenbilanz: Die mir von Peter Pohling vor eineinhalb Jahren gestellte Aufgabe, für $\boldsymbol{\alpha}$ eine akzeptable Näherungsformel zu finden, schien angesichts des Scheiterns zahlreicher Experten in den zurückliegenden einhundert Jahren ein Ding der Unmöglichkeit zu sein. Allerdings erlagen in der Vergangenheit die meisten dieser „Glücksritter" bei ihrer Suche nach einer *Alpha*-Formel der „unheimlichen Magie" der Zahl **137**. Sie entspricht nämlich annähernd dem reziproken Wert von $\boldsymbol{\alpha}$.
Wissenschaftler wie Arthur Eddington (1882 – 1944), Wolfgang Heisenberg (1901 – 1976, Nobelpreis 1932) und Paul Dirac (1901 – 1984, Nobelpreis 1933) waren zeitweilig einer *„Alpha-Manie"* verfallen. Arthur I. Miller, Physiker und emeritierter Professor für Geschichte und Philosophie der Naturwissenschaften am University College in London veröffentlichte 2011 das Buch „**137**" [4], in dem er die Suche von Wolfgang Pauli nach dieser kosmischen Zahl schildert.


Wolfgang Pauli (1900 – 1958, 1945 Nobelpreis für Physik)
Quelle: Wikipedia, Bettina Katzenstein, ETH Zürich

Wolfgang Pauli entdeckte 1925 ein fundamentales Prinzip der Quantenphysik, das sogenannte „Ausschließungsprinzip". Es lieferte erstmals eine Erklärung für den periodischen Aufbau der Atome. Dieses Prinzip wird deshalb auch als *„Pauli-Prinzip"* bezeichnet.

Das spezielle Ausschließungsprinzip für Elektronenbahnen besagt, dass sich die Elektronen eines Atom-Orbitals mindestens in einer Quantenzahl *unterscheiden* müssen. Da die Elektronen eines Orbitals die Spin-Quantenzahlen die Werte -1/2 bzw. +1/2 aufweisen können, war der eigentliche Grund gefunden für diese *Feinstruktur*, für die Aufspaltung der Spektrallinien beim Wasserstoff.
Obwohl Paulis Entdeckung es erlaubte, die Feinstruktur der Atome zu entziffern, blieb das Mysterium „**137**" ein ungelöstes Rätsel.
Max Born (1882 – 1970, Nobelpreis 1954) versuchte eine Erklärung für dieses Phänomen zu finden.
„Er suchte nach Gründen, warum die **137** eine solch mystische Anziehungskraft auf die Wissenschaftler ausübte. Ein Hauptgrund war schnell gefunden: Offenbar bot die 137 die Möglichkeit, den heiligen Gral der wissenschaftlichen Studien zu erlangen – nämlich die Verbindung der Relativität (das Studium des großmaßstäblichen Universums) mit der Quantentheorie (das Studium des äußerst Kleinen im Atom)" [4, S. 330 - 331]. Max Born schrieb in dem Artikel „*The Mysterious Number 137*" abschließend:
„Die Tatsache jedoch, das $\boldsymbol{\alpha}$ genau den Wert 1/137 hat, ist mit Sicherheit kein Zufall, sondern ein Naturgesetz. Es ist klar, dass die Erklärung dieser Zahl zur wichtigsten Aufgabe der Naturwissenschaft werden muss". Wir wissen inzwischen, dass der Kehrwert von 137 *nicht* genau zu dem Wert für $\boldsymbol{\alpha}$ führt.
Nun stellt Gerhart sein Zwischenergebnis vor.

### 3. Wie kann der Zahlenwert von $\alpha$ dargestellt werden?

Meine Bemühungen um die Berechnung des eigentlichen Wertes der Feinstrukturkonstante $\boldsymbol{\alpha}$ führten schon bald zu einer von mir noch immer bewunderten Rechenvorschrift mit einer erstaunlich großen Genauigkeit (Restfehler nur $5 \cdot 10^{-12}$), die jedoch einen großen Makel hat:
Sie muss ohne $\boldsymbol{\pi}$ auskommen! Das kommt einem wissenschaftlichen Sakrileg gleich, denn

„Ohne $\boldsymbol{\pi}$ geht es nie!"

Was war zu tun?
Eine Potenzreihe unter der Verwendung von $\boldsymbol{\pi}$ mit der Genauigkeit von mindestens 6 gültigen Ziffern musste her. Die Möglichkeiten einer einfachen Addition der negativen Potenzen von $\boldsymbol{\alpha}$ kann meiner Ansicht nach diese Forderung nicht zufriedenstellend erfüllen.
Als Alternative habe ich eine *alternierende* Reihe (wechselnde Vorzeichen zwischen den Summanden) mit ($\boldsymbol{\pi}$-2) anstelle von $\boldsymbol{\pi}$ gefunden.

- Mit einigen Tricks bei der Umgestaltung der Potenzreihe,
- etwas Glück bei der Darstellung des Korrekturfaktors
- sowie einem optimalen Ende der Potenzreihe

ergab sich die Näherungsformel

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2^6} - 2^6} \sum_{1}^{74} (2-\pi)^{-n} \quad . \qquad (3)$$

Die Abweichung von dem experimentell ermittelten **CODATA**-2014-Wert beträgt nur $3{,}75 \cdot 10^{-9}$.

Das Ergebnis dürfte bei Gerharts „Spürsinn" noch nicht das Ende der „Fahnenstange" sein.
Für Leser mit chronischer „Alpha-Manie" hat Manfred Kunz aus Leipzig seine langjährigen Untersuchungen zur Berechenbarkeit von $\boldsymbol{\alpha}$ in einem zehnseitigen **PDF**-Artikel zusammengefasst [5].

Der dritte und letzte Teil der Diskussion war der Feinstruktur der Partikel, den Abmessungen und den Eigenschaften der Materie, den Ladungen der Kräfte, gewidmet. Beginnen wir mit den Längen und den Abmessungen.

### 4. Wie stuft $\alpha$ atomare Größen und Teilchen-Abmessungen?

Am Ende des Diskussionsabends interessierten wir uns für die „innere Stufenleiter" atomarer Strukturen. Wir „stiegen" – natürlich nur gedanklich - hinab zu den winzigen Partikel-Abmessungen und begannen die Reise bei dem atomaren Radius

$$a_0 = \frac{1}{m_e}\left(\frac{\hbar}{\alpha c}\right) \quad . \qquad (4)$$

Der Bohrsche Radius $\boldsymbol{a_0}$ 0,529 $\cdot 10^{-10}$ m liegt im Nanometer-Bereich. In der Gl. (4) steht die Masse-Einheit der Atomphysiker. Das ist die Elektronen-Masse $\boldsymbol{m_e}$ mit annähernd 9,11$\cdot$**$10^{-31}$ kg**. Das ist eine unvorstellbar kleine Masse!

- Wenn wir als *„erste Stufe"* den Bohrschen Radius $\boldsymbol{a}_0$ *einmal* mit $\boldsymbol{\alpha}$ multiplizieren, dann erhalten wir die durch 2$\boldsymbol{\pi}$ reduzierte Compton-Wellenlänge $\lambda_C$ /2$\boldsymbol{\pi}$ ≈ 3,86$\cdot 10^{-13}$ m. Bei *Streuung* an einem Elektron vergrößert sich die Wellenlänge eines Photons. Diesen Effekt entdeckte Arthur Compton (1892 – 1962, Nobelpreis 1927) **1922**. Damit konnte Compton den bereits 1905 von Albert Einstein (1879 - 1955, Nobelpreis **1922**) vorhergesagten Teilchen-Charakter des Lichts erstmals experimentell bestätigen!
- Wird $\boldsymbol{a}_0$ noch ein zweites Mal mit $\boldsymbol{\alpha}$ multipliziert, dann stoßen wir mit dem sogenannten „klassischen" Elektron-Radius $\boldsymbol{r_e}$ ≈2,82$\cdot 10^{-15}$ m bereits die Region der *Atomkerne* vor. Denn der Radius der Protonen liegt immerhin bei 0,875$\cdot 10^{-15}$ m. Und das ist ein Drittel von $\boldsymbol{r_e}$.
- Wird der Bohrsche Radius $\boldsymbol{a}_0$ noch weitere zweimal mit $\boldsymbol{\alpha}$ multipliziert, dann beginnt die „Region der Leptonen" mit dem von mir 2013 vorhergesagten *realen* Elektronen-Radius $\boldsymbol{r_{el}}$ = 4,71$\cdot 10^{-19}$ m [2, S. 176].

## 5. Strukturiert $\alpha$ die Ladungen und die Feldkonstanten?

Ja, sicher! Das haben wir bereits bei Gl. (4) erkennen können. Wenn in dieser Beziehung $\boldsymbol{a}_0$ und $\boldsymbol{m_e}$ ihre Plätze vertauschen, erhalten wir die Strukturgleichung für die Masse $\boldsymbol{m_e}$ der Elektronen und der Positronen. Denn „Massen" sind ebenso „Ladungen". Das sind die *Ladungen* der Schwerkraft [6].
Es ist übrigens auffällig, dass $\boldsymbol{\alpha}$ als „Verkleinerungsfaktor" stets neben der Lichtgeschwindigkeit $\boldsymbol{c}$ steht. Das ist ein allgemeines Struktur-Merkmal der Grundkräfte sein. Denn so können die Grundkräfte miteinander wechselwirken und so können sich die diversen Energieformen sich umwandeln.

Am Schluss diskutierten wir über Bohrs „halbklassisches" *elektro-kinetisches* Kräftegleichgewicht. Auf der linken Seite von Gl. (5) finden wir den „elektrischen" Term der Gl. (1) wieder und rechts steht Bohrs kinetischer Ansatz. Das ist ein geschwindigkeitsabhängiger Term:

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\left[e^2\right]}{\left\{a_0\right\}^2} = (\alpha c)^2\left[\frac{m_e}{a_0}\right] \quad . \qquad (5)$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit dem *Quadrat des atomaren Radius* (das ist der geschweifte Klammerausdruck) erhalten wir eine Gleichung mit einer interessanten dualsymmetrischen Struktur

$$(a_e\hbar)^2\left[\frac{1}{a_e^2}\frac{\alpha c}{\hbar}\right] = (a_0\alpha c)^2\left[\frac{1}{a_0^2}\frac{\hbar}{\alpha c}\right] \quad . \qquad (6a)$$

Die links stehenden Terme [2, S. 38] mit *runden* Klammern der Gleichungen (5) und (6a) sind gleichwertige Ausdrücke für die Coulomb-Konstante $\boldsymbol{G_E}$. Die *atomare* Coulomb-Konstante $\boldsymbol{G_E}$ der *elektrischen* Kraft entspricht (im Prinzip) der Newtonschen Vakuum-Gravitationskonstante $\boldsymbol{G}$. In der rechts stehenden runden Klammer der Gl. (6a) steht eine etwas weniger bekannte Naturkonstante. Die Physiker nennen sie „Zirkulationsquantum" (quantum of circulation) [1]. Das Quadrat des Zirkulationsquantums ist die *Zirkulationskonstante* $\boldsymbol{G_K}$ der *kinetischen* Kraft.

$\alpha$ wird auch als „*elektromagnetische Kopplungskonstante*“ bezeichnet [7]. Als ich 2012 die „inneren“ Strukturen der Coulomb-Konstante $G_E$ und der elektrischen Feldkonstante $\varepsilon_0$ entdeckte, war ich überrascht, dass ausgerechnet in den Strukturen der *elektrischen* Feldkonstanten $\alpha$ nicht vorkommt.
Noch etwas zu den atomaren Ladungen. In eckigen Klammern stehen links

- die Quadrate der *elektrischen* Elementarladung $e$
  und auf der rechten Seite
- die Quadrate der *kinetischen* Elementarladung $d_e$.

Wir sehen, in der Gleichung (6a) heben sich die *elektrische* Elementarlänge $a_e$ und die *kinetische* Elementarlänge $a_0$, der Bohrsche Radius, in den Zählern und Nennern gerade auf. Übrig bleibt das universelle *atomare Energiemoment*

$$\mathrm{M}_A = \alpha c \cdot \hbar \tag{6b}$$

Energiemomente haben die Dimensionen: Drehmoment x Geschwindigkeit bzw. Energie x Länge.

Dieses *atomare* Energiemoment ist eine konstante Größe des Mikrokosmos. Es hängt nur von der *atomaren* Geschwindigkeit $v_A=\alpha c$ und dem atomaren Wirkungsquantum $h/2\pi$ ab.
Das ist eines der faszinierendsten Beispiele für die atomare Harmonie und die gebrochene Symmetrie des Kosmos.
Im zweiten Teil unserer Diskussionsreihe zu den mysteriösen Konstanten des Kosmos am 15. März werden wir diskutieren, wie die

*Kräfte-Strukturkonstante*

die Verbindung zwischen der winzigen atomaren Länge $a_0$ des Mikrokosmos und der maximalen Ausdehnung $a_e$ eines „Hyperuniversums“ herstellt.

Gerhart Ziegner, Peter Pohling

**Literatur**:

[1] Fundamental Physical Constants from NIST, CODATA 2014 von https://physics.nist.gov/cuu/Constants/
[2] Peter Pohling, Durchs Universum mit Naturkonstanten - Abschied von der Dunklen Materie, Verlag BoD, 2013. Siehe auch E-Book bei www.naturkonstanten.de
[3] Wikipedia, Compton-Effekt https://de.wikipedia.org/wiki/Compton-Effekt
[4] Arthur I. Miller, 137 – S. G. Jung, Wolfgang Pauli und die Suche nach der kosmischen Zahl, Deutsche Verlags-Anstalt, 2009
[5] Manfred Kunz, Eine Formelsuche für die Naturkonstante $\alpha$ als Chance für Jedermann, https://www.kunz-consult.com/app/download/5789596706/DD_25_3_Kunz-M.pdf
[6] Peter Pohling, Statt ´Weltformel´ eine einheitliche Theorie der Kräfte und Felder, Informationsblatt der Palitzsch-Gesellschaft, Jg. 17 (2016) Nr. 3, S. 3-9
[7] Feinstrukturkonstante, Wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Feinstrukturkonstante